

Die Käferwanderung auf dem Würfel

BRIGITTE WINKENBACH, KATZENELNBOGEN

Zusammenfassung: *Neue Bildungsstandards, Förderung des mathematischen Denkens, immer mehr Geometrie und jetzt auch noch stochastische Themen in der Grundschule? Wohin soll das führen? Machen Sie sich zusammen mit Ihren Schülern auf den Weg! Entdecken Sie gemeinsam, wie oft uns Fragestellungen der Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik im Alltag und im Unterricht begegnen. Freuen Sie sich darauf, die Wege zu den Lösungen zu finden. Verknüpfen Sie stochastische Fragestellungen mit anderen Teilgebieten der Mathematik. So zeigt der Erfahrungsbericht über die „Käferwanderung auf dem Würfel“ eine enge Verzahnung mit der Geometrie.*

1 Einleitung

Um die Aufgabe „Käferwanderung auf dem Würfel“ erfolgreich bearbeiten zu können, bedarf es gewisser Vorkenntnisse der Schüler. Der Würfel mit seinen geometrischen Eigenschaften sollte hinreichend bekannt sein. Ebenso sollten Fragestellungen aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeit thematisiert werden, um Begriffe wie *möglich, wahrscheinlich, unmöglich, unwahrscheinlich, sicher* zu erarbeiten. Und nicht zuletzt sollten die Schüler fähig sein, ihr Tun zu verbalisieren, Vermutungen anzustellen und zu überprüfen.

2 Die Eigenschaften des Würfels kennenlernen

Geometrische Figuren zu erkennen, zu benennen und darzustellen war Thema im 3. und im 4. Schuljahr. Dazu wurden Modelle von Würfel, Quader, Kugel, Kegel, Pyramide und Zylinder untersucht. Begriffe wie Kante, Seitenfläche, Grundfläche, Oberfläche, Netze wurden verwendet. Die Schüler bauten Modelle von Würfel und Quader und erkannten, wie wichtig das genaue Messen und Zeichnen ist. Das räumliche Vorstellungsvermögen wurde geschult, indem sie entscheiden mussten, aus welchen Netzen man einen Würfel herstellen kann. Das Rechnen kam zum Einsatz, als die Schüler ihr eigenes Würfelnetz entwarfen: Wie groß muss mein Papier sein, wenn mein Würfel eine bestimmte Kantenlänge haben soll? Nach dem Bau von Kantenmodellen wurden Würfelnetze erarbeitet. Beim Herstellen der Würfel konnten die Schüler aus verschiedenen Arbeitsblättern mit den bekannten Würfelnetzen auswählen. Es waren aber auch einige falsche Möglichkeiten dabei, die man zunächst herausfinden musste. Diese Aufgaben

wurden allerdings von einigen Schülern nur durch die praktische Schneide- und Faltarbeit entdeckt. Sehr schnell stellten die Schüler fest, dass Klebelaschen den gebastelten Würfel haltbarer machen. Nach einigen Fehlversuchen mit doppelten oder fehlenden Klebelaschen entwickelten sie ein großes Geschick bei der Herstellung von Würfelmodellen. Sehr großer Beliebtheit erfreute sich eine Aufgabe, die in den Kunstunterricht verlegt wurde. Die Schüler stellten „Themenwürfel“ her: Fußballwürfel, Ritterwürfel, Formel-1-Würfel, usw. Dabei wurde das Würfelnetz mit passenden kunstvollen Bildern bemalt und zwar so, dass nach dem Ausschneiden und Falten immer die beiden zusammengehörigen Bilder auf gegenüberliegenden Würfelseiten lagen: Fußballspieler und Vereinswappen, Schild und Schwert, Burg und Wappen, Fahrer und Auto und vieles mehr. Diese Aufgabe erforderte eine gute Planung und saubere Ausführung. Es musste nicht nur beachtet werden, welche Bilder sich später gegenüberliegen, sondern auch, in welcher Richtung das Bild gemalt werden musste.

3 Die Wahrscheinlichkeit in Sachaufgaben

Stochastische Fragestellungen in der Grundschule sollten immer in eine Sachsituation eingebunden werden. Zum einen zeigt das den Schülern, wie sehr die Mathematik mit dem Leben verbunden ist und nicht nur in der Mathematikstunde stattfinden muss. Zum anderen erlauben aktuelle schulische Gegebenheiten, öfter als man denkt, stochastische Fragestellungen. Wohlgemerkt – es geht nicht darum, immer Lösungen zu finden, auch das Verbalisieren des Problems ist schon ein Erfolg.

3.1 Beispiel: Lose

An einem Schulfest wollte das 4. Schuljahr eine Verlosung von Büchern anbieten. Dabei sollten besonders dicke und aufwändige Bücher die Hauptpreise sein. Als Trostpreise hatten die Schüler einzelne Hefte von Klassenzeitungen vorgesehen. Plötzlich tauchten Probleme auf:

- Was ist, wenn sofort einer den Hauptpreis zieht? Dann kauft kein Mensch mehr Lose!
- Kann das überhaupt sein, dass der Hauptpreis sofort gezogen wird? – Ja, es ist möglich, aber es ist eher unwahrscheinlich.

- Kann es sein, dass niemand den Hauptpreis zieht? – Nein, wenn alle Lose verkauft sind, ist das eigentlich unmöglich.

Die Diskussion ging so aus, dass die Schüler die Lose verwarfen und sich etwas anderes ausdachten.

3.2 Beispiel: Glücksrad

Die Schüler erinnerten sich an die schuleigenen kleinen Glücksräder und dachten daran, wie sie damals im 2. Schuljahr mit diesen Glücksrädern Gummibärchen als Gewinn erhalten konnten. Die Glücksräder hatten acht bunte Felder mit verschiedenen Anzahlen roter Felder. Die Spielregel hieß: Rot gewinnt. Jeder Schüler konnte selbst auswählen, welches der Räder er benutzen wollte. Im 2. Schuljahr war es so, dass viele Schüler erst nach langer Spielzeit eine Ahnung davon bekamen, dass die Chancen ungleich verteilt waren.

- Es gab ein Glücksrad mit nur einem einzigen roten Feld. Die Schüler stellten am Ende fest: Es ist schon möglich rot zu bekommen, aber eher unwahrscheinlich.
- Bei dem Glücksrad mit 5 roten Feldern stellten sie – manchmal enttäuscht – fest: Es ist sehr wahrscheinlich rot zu bekommen, aber doch nicht sicher.
- Das hatten die Kinder sofort heraus: Bei einem Glücksrad mit keinem einzigen roten Feld braucht man es gar nicht erst zu versuchen, denn das ist unmöglich.
- Die pfiffige Frage eines Kindes: „Gibt es keins mit nur roten Feldern?“ führte zu viel Gelächter, zeigte aber auch das Problem: Dann wäre der Gewinn zwar sicher, aber wo bliebe der Spielreiz?

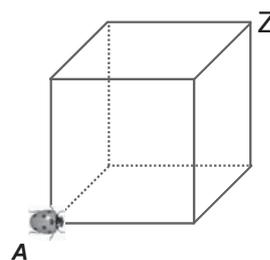
Die Kinder im 4. Schuljahr gingen das Glücksradproblem überlegter an, zählten die Farbfelder auf den Glücksrädern, um sich für eines zu entscheiden, das beim Schulfest genutzt werden sollte. Sie benutzten Begriffe wie sicher, ziemlich sicher, ganz unmöglich, eher wahrscheinlich, eher unwahrscheinlich. Sie machten eigene Versuche, drehten die Glücksräder, 10mal, 20mal, 30mal und stellten so sogar eine Datensammlung zusammen. Ein ungeheurer Lernerfolg in meinen Augen, auch wenn am Ende keine greifbare Lösung vorlag.

Am Ende wurde die Verlosung übrigens ganz gestrichen! Die Schüler bauten ein Kegelspiel auf, notierten die Ergebnisse der Teilnehmer, und so ergab sich für die Schüler eine „gerechte Preisverteilung“ für die Bücher.

4 Die Käferwanderung auf dem Würfel

Gemeinsam mit Elke Warmuth, Berlin hatte ich eine Fortbildung zum Thema „Zufall und Wahrscheinlichkeit in der Grundschule“ gestaltet. Dabei lernte ich geeignete und reizvolle Aufgabenstellungen zu diesem Thema kennen. Besonders gut gefielen mir die kindgemäßen und handlungsorientierten Erarbeitungsmöglichkeiten mit Materialien, die meist in der Klasse vorhanden oder leicht zu beschaffen sind. Vor allem die Aufgabe „Käferwanderung auf dem Würfel“ empfand ich für mein 4. Schuljahr als sehr ansprechend und präsentierte sie meiner Klasse schon kurz nach der Fortbildung. Als Zeitrahmen empfiehlt sich eine Doppelstunde, damit alle Aufgaben des Arbeitsblattes (die Aufgaben sind in diesen Aufsatz *mit kursiver Schrift* integriert) und alle Arbeitsphasen ohne Zeitdruck durchgeführt werden können. Jedes Kind erhielt ein Arbeitsblatt und das Material. Es stand den Schülern aber frei, ob sie alleine oder mit Partner oder mit der ganzen Tischgruppe von 4–6 Kindern arbeiten wollten.

4.1 Das Problem



*Ein Käfer krabbelt auf den Kanten eines Würfels entlang. Er startet an der Ecke A und möchte die gegenüberliegende Ecke Z erreichen. Weil er so klein ist, kann er sein Ziel nicht sehen und geht an **jeder** Ecke – also auch bei A – auf gut Glück in eine der Richtungen, aber niemals zurück. Für eine Kante braucht er immer genau eine Minute. Nach drei Minuten ist er müde und hört auf.*

Das Problem wurde den Kindern zunächst mündlich präsentiert mithilfe eines großen Würfels und eines kleinen Holzmarienkäfers. Dabei liegt es im Ermessen des Lehrers wie er seinen Schülern den Anlass für die Wanderung des Käfers von A nach Z definiert: Wartet dort die Frau des Käfers? Oder gibt es da besonders gutes Futter? Da die Schüler erwartungsgemäß zunächst ihre Aufmerksamkeit auf den niedlichen kleinen Käfer richteten, spürte man, dass sie das Problem noch nicht erfasst hatten.

Die Problemstellung wurde nun noch einmal präsentiert. Dabei wurden Visualiser und Beamer eingesetzt. Dieses Präsentationsmedium liefert scharfe Bilder auch von dreidimensionalen Gegenständen

und sogar von Bewegungen. Auf diese Weise konnte die Käferwanderung vorgemacht werden, und den Kindern wurde die Problemstellung klar. Wichtig ist auch die Begriffsklärung: Kanten, Ecke, auf gut Glück, wahrscheinlich.

Außerdem erhielt nun jeder Schüler das Arbeitsblatt und ein Holzkäferchen. Als weitere Anschauung benutzten die Schüler ihre selbstgebastelten Würfel. Nachdem noch einige Kinder die kleinen Käfer genügend bestaunen mussten, ließen schon die ersten ihre Tierchen an den Kanten entlang krabbeln.

Es entstand viel Kommunikation an den Tischen, aber die Schüler sprachen am Anfang zunächst noch mehr mit ihren Käfern als mit den Klassenkameraden. Da ich aus den Gesprächen immer wieder die Wortfetzen „so klein“, „müde“, „musst dich ausruhen“ entnahm, ließ ich die Kinder ein Zeitlang einfach so weiterspielen. Auf diese Weise verinnerlichten sie die Spielregel mit den drei Kanten.

Einige Kinder durften am Visualiser zeigen, wie ihr Käfer krabbelte. So konnte noch einmal darauf hingewiesen werden, dass der Marienkäfer immer nur vorwärts und nie zurück geht.

Nun musste noch dafür gesorgt werden, dass die Schüler den Ausgangspunkt *A* und den Zielpunkt *Z* im Auge hatten.

Mittlerweile hatten die Schüler die Problemstellung ausreichend erfasst, und sie bearbeiteten die erste Aufgabe.

4.2 Aufgabe 1 – erste Vermutungen

*Was meinst du, ist es wahrscheinlicher, dass er nach drei Minuten in *Z* angekommen ist oder dass er nicht in *Z* angekommen ist? Oder sind die Chancen vielleicht gleich?*

Fast sofort nach der Aufgabenstellung äußerten sich die Schüler sehr lebhaft und meinten, dass der Käfer das ja niemals schaffen könne. Es müsse ein ziemlicher Zufall sein, wenn er genau nach drei Kanten an seinem Ziel ankäme.

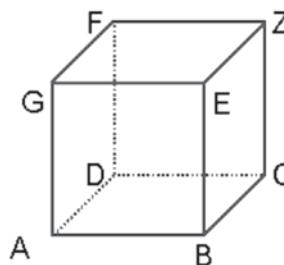
Ein Schüler wollte es den andern gleich mit dem Visualiser zeigen, wie wenig Chancen der Käfer hat. „Schau mal, der Käfer geht hier ... und hier ... und oh, na ja, jetzt hat er Glück gehabt!“ Also noch einmal: „Jetzt geht er hier ... und hier ... und hier, siehst du, jetzt hat er es nicht geschafft!“ Ein anderer Schüler kommentierte aber sofort: „Wenn er aber da die andere Kante genommen hätte, hätte er es auch wieder geschafft!“ „Ja, aber er kann es ja nicht sehen!“

An dieser Stelle setzte ich die nächste Aufgabe ein.

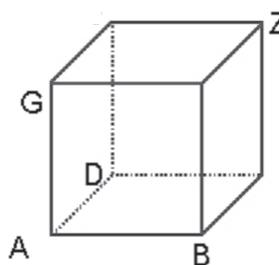
4.3 Aufgabe 2 – ausprobieren

Wo kann er denn überhaupt nach 3 Minuten angekommen sein?

Den Schülern wurde schnell klar, dass nun eine gewisse Systematik hilfreich wäre. Hier zeigten sich die verschiedenen Fähigkeiten der Schüler: Während einige die Möglichkeiten mit ihrem Holzkäfer und dem gebastelten Würfel durchspielten und den Weg jedes Mal ganz bis zum Ende gingen – dabei auch manchmal vergaßen, welche Wege sie schon ausprobiert hatten –, stiegen manche Schüler nun um auf den gezeichneten Würfel. Sehr interessant waren dabei die verschiedenen Möglichkeiten, die Wege zu notieren. Einige Schüler malten die Wege mit verschiedenen Buntstiften nach, waren dann aber sehr schnell enttäuscht über die Unübersichtlichkeit der entstandenen Zeichnung. Nur eine Gruppe hatte die Idee, die Ecken mit Zeichen zu versehen. An dieser Stelle sollte der Lehrer eingreifen und den Schülern die einheitliche Bezeichnung der Ecken mit Buchstaben vormachen. Auf diese Weise kann man später besser über die verschiedenen Lösungswege und Lösungen sprechen.



Die Schüler waren sehr überrascht, als sie aufgrund ihrer Notizen feststellten, dass der Käfer gar nicht an allen Ecken ankommen kann, sondern nur an den Ecken *B*, *D*, *G* oder *Z*. Einigen fiel auf, dass die Ecken *B*, *D* und *G* „ziemlich dicht“ an *A* liegen, während *Z* „ganz weit weg“ liegt.



Dabei war es für die Kinder zunächst völlig unverständlich, warum nicht alle Ecken erreicht werden konnten.

4.4 Aufgabe 3 – Datensammlung

Spiele mit deiner Banknachbarin oder deinem Banknachbarn 20-mal die Käferwanderung. Nehmt einen

Würfel, um auszulosen, in welche Richtung der Käfer von A und den nächsten Ecken aus geht. Wenn ihr dreimal gewürfelt habt, notiert ihr die Ecke, an der der Käfer angekommen ist. Dann beginnt bei A eine neue Wanderung.

Bei dieser Simulation erkannten die Schüler, dass es an den einzelnen Ecken eine verschiedene Anzahl an Möglichkeiten des Weitergehens gab. Daraufhin überlegten sie sich eine Strategie, wie sie die sechs Würfelzahlen nutzen konnten. Für die Ecke A legten sie fest, dass man durch 1 oder 2 zu G kommt, durch 3 oder 4 zu D und durch 5 oder 6 zu B . Da es für die nächsten Kanten nur noch zwei Möglichkeiten gab, teilten sie die Würfelzahlen entweder nach gerade bzw. ungerade auf oder nach 1, 2, 3 bzw. 4, 5, 6. Sehr schnell mussten sie aber ihre Spielregel ergänzen mit Bezeichnungen wie „nach hinten“, nach unten“ nach recht“ „nach links“. Am Ende legten sie bei Schritt 2 und 3 vor jedem Würfeln fest, zu welchem Weg eine 1, 2, 3 bzw. 4, 5, 6 führen sollte.

Die Schüler wählten verschiedene Möglichkeiten, ihre Ergebnisse zu notieren. Während einige ganz einfach nach jeder Wanderung den Endpunkt aufschrieben, legten sich andere eine kleine Tabelle an, in der sie mit Strichen ihren Endpunkt eintrugen. Alle Schüler kontrollierten aber, ob sie wirklich 20-mal den Weg gegangen waren.

4.5 Aufgabe 4 – Auswertung

Wertet eure Käferwanderungen aus und vergleicht mit den Ergebnissen anderer Kinder. Tragt die Ergebnisse der ganzen Klasse zusammen.

An der Tafel wurden alle Ergebnisse in Tabellenform zusammengetragen. Bei dem nachfolgenden Gespräch verglichen die Schüler die Datensammlungen. Sie stellten fest, dass jede Gruppe andere Ergebnisse hatte, aber in der Datensammlung der ganzen Klasse die Ecke Z die meisten Striche hatte, im Gegensatz zu D , B und G , die – einzeln gesehen – viel weniger Striche hatten.

An dieser Stelle wurde deutlich, dass die Schüler das Problem etwas aus den Augen verloren hatten und vergessen hatten, dass es eigentlich nur um das Erreichen von „ Z “ oder „nicht Z “ ging.

Die nachfolgende Aufgabe 5 sollte da Abhilfe schaffen.

4.6 Aufgabe 5 – Systematik

Findet gemeinsam alle Wege, die der Käfer in drei Minuten bei Start in A gehen kann. Wie viele davon enden in Z ? Haben alle Wege die gleiche Chance?

Ein bisschen Theorie

Folgender Zählalgorithmus, mit dem man die Anzahl der Wege bestimmen kann, liegt dieser Aufgabe zugrunde:

Eine Auswahl werde in k aufeinanderfolgenden Schritten vollzogen, wobei die Reihenfolge der Schritte beachtet wird. Gibt es dabei

- im 1. Schritt n_1 Möglichkeiten,
- im 2. Schritt jeweils n_2 Möglichkeiten,
- im 3. Schritt jeweils n_3 Möglichkeiten und
- ...
- im k -ten Schritt jeweils n_k Möglichkeiten,

so gibt es insgesamt $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$ Möglichkeiten der Auswahl.

Für die Käferwanderung bedeutet das:

Da es k aufeinander folgende Schritte gibt, ist $k = 3$. Da man bei der Ecke A unter 3 Möglichkeiten wählen kann, gilt $n_1 = 3$.

Da man wegen des Verbots des Zurückgehens nur noch unter zwei Möglichkeiten wählen kann, gilt $n_2 = 2$.

Da man auch beim letzten Schritt nur unter zwei Möglichkeiten wählen kann, gilt $n_3 = 2$.

Daher gibt es $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ mögliche Wege.

Sechs Wege enden bei Z , sechs Wege enden nicht bei Z . Alle Wege sind gleichwahrscheinlich.

Ziel von Aufgabe 5 ist es, dass die Schüler diese 12 Wege finden und in geeigneter Form notieren. Außerdem sollen sie entdecken, dass die Chancen gleich sind.

Praktische Arbeit der Schüler

Beim Notieren der Wege erwies es sich, wie sinnvoll es war, diese Aufgabe erst im 4. Schuljahr einzusetzen. Die Schüler hatten genügend Erfahrung mit dem Notieren als Baumdiagramm oder nach dem Schema

ABCD ABCZ ABEG ABEZ

ADCB ADCZ ADFG ADFZ

AGEB AGEZ AGFD AGFZ

Es zeigte sich auch, dass man sich wie fast immer in der Grundschule auf die Kommunikation der Schüler verlassen kann. Was man als Lehrer oft als Vorsagen oder Abschreiben bezeichnen kann, sehen die Kinder als Weitergabe und Nutzung guter Ideen. Und so war es auch hier: „Wir haben 10 Wege gefunden!“ „Was

so viele! Wir haben nur 8! Zeig doch mal!“ Und so sprach sich schnell unter der Hand in der Klasse herum, dass es wohl 12 Wege geben müsse, und die Gruppen waren hochmotiviert, sie alle zu finden.

Die 12 Wege wurden danach systematisch an der Tafel aufgeschrieben. Alle Schüler konnten nun sicher sein: Sechs Wege enden bei Z, sechs Wege enden nicht bei Z. Alle Wege sind gleichwahrscheinlich. Es ist also genauso wahrscheinlich, „Z“ wie „nicht Z“ zu erreichen. Es war sehr interessant festzustellen, dass nun erst wieder vielen Schülern klar wurde, dass es gar nicht darum ging, an welcher Ecke der Käfer nach drei Minuten tatsächlich ankam, sondern dass es nur um die Ecke „Z“ oder „nicht Z“ ging.

4.7 Aufgabe 6 – Transfer

Beantworte nun noch einmal die erste Frage:

Was meinst du, ist es wahrscheinlicher, dass er nach drei Minuten in Z angekommen ist oder dass er nicht in Z angekommen ist? Oder sind die Chancen vielleicht gleich?

Eine verblüffende Feststellung für die Kinder, aber untermauert von der Simulation, der Datensammlung, der Systematik und der Auswertung: Tatsächlich sind die Chancen gleich. Sehr schön wurde diese Erkenntnis von einer Schülerin ausgedrückt: „Es ist sozusagen fifty-fifty, also unentschieden!“ Und eine andere relativierte es sofort: „Er muss aber auch Glück haben!“

5. Schlussbemerkung

Herzlichen Dank an Frau Warmuth, die in der gemeinsamen Fortbildung „Daten und Zufall in der Grundschule“ den Teilnehmern und mir nicht nur viele Türen geöffnet hat, sondern uns auch Mittel und Arbeitsblätter an die Hand gab, um diese neuen Wege gut gerüstet zu begehen. Für meine Klasse und mich war es eine Mathematikstunde, die bei meinen Schülern Verhaltensweisen hervorbrachte, die man sich als Lehrer nur wünschen kann: Neugier, lebhaftes und sachliche Diskussionen, zielgerichtetes und konzentriertes Arbeiten und eine besondere Zufriedenheit. Vielleicht macht dieser Erfahrungsbericht anderen Lehrern Mut, ungewohnte Themen im Mathematikunterricht anzuschneiden – nicht zuletzt damit die Schüler ein Gespür dafür bekommen, dass Mathematik mehr als ein Schulfach sein kann.

Literatur

- Engel, A. Varga, T., Walser, W. (1974). Zufall oder Strategie? Spiele zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Primarstufe. Stuttgart: Klett.
- Warmuth, E. (2009): Handout zur Fortbildung „Daten und Zufall in der Grundschule“, Mainz.

Anschrift der Verfasserin

Brigitte Winkenbach
Grundschule im Einrich
Burgstraße 4
56368 Katzenelnbogen
BWinkenbach@t-online.de